Fonctions complexes

de variables complexes " holomorphes "

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \longrightarrow f(z)$

On a déjà rencontré z^n : monome

$\sum_0^N a_n z^n$: polynome

$\sum$ " : " série "

× Fonction continue sur $\mathbb{C}$

$\forall \varepsilon$, il existe η tq $\forall z$ $|z - z_0| \overset{<\eta}{\Rightarrow} |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

× Dérivabilité :

× Version 1 :

$\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe et vaut "nb dérivé" = L

ou

$\lim\limits_{\xi \to 0} \frac{f(z+\xi) - f(z_0)}{\xi}$ existe

× Version 2 :

$\frac{f(\xi + z) - f(z_0)}{\xi} = L + \mathcal{E}(\xi) \quad \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(z+\xi) - f(z_0) = \xi L + \xi \,\mathcal{E}(z)$

$\Leftrightarrow \quad f(z+\xi) = f(z_0) + \xi L + \xi\, \mathcal{E}(z)$

Développement limité à l'ordre 1.

⟶ Si c'est vrai $\forall z_0 \in U$, f est dérivable (V°1) } sur U.
différentiable (V°2) }

Question = $z \to z^n$ dérivable ?

on a : $(z+\xi)^n = z^n + C_n^1 z^{n-1} \xi + \binom{n}{2} \xi^2 z^{n-2}$

$= \binom{n}{1} z^{n-1} \xi$

$= z^n + \xi z^{n-1} + \xi^2(\dots) + \xi^3(\dots)$

Les monomes (type z^n) sont dérivables sur $\mathbb{C}$.

Les polynômes " sur $\mathbb{C}$.

Les séries " dans le disque de convergence

Il en résulte :

$\sum a_n (z - z_0)^n$ dérivable dans un cercle de centre z_0.

exponentiel, sin, cos, ch, sh ...

Corollaire :

On peut montrer que :

× la somme de 2 fonctions dérivables est dérivable. : $f+g$

× le produit " est dérivable $(fg)' = fg' + f'g$

× le quotient " est dérivable : f/g

Preuve :

$f(z+\xi) = f(z) + \xi L_1 + \xi\, \mathcal{E}_f(\xi)$ $\qquad L_1 = f'(z)$

$g(z+\xi) = g(z) + \xi L_2 + \xi\, \mathcal{E}_g(\xi)$. $\qquad L_2 = g'(z)$.

Multiplicat° ⟶ $(f.g)(z+\xi) = f(z)g(z) + \xi\,(f(z)L_2 + g(z)L_1)$

$= fg(z) +$ "

Addition ⟶ $(f+g)(z+\xi)$

1

2

Composition de fonctions $f \circ g$.

$\begin{cases} g \text{ dérivable en } z \\ f \text{ dérivable en } Z = g(z). \end{cases}$

Alors $f \circ g$ est dérivable et : $f'(g(z)) \cdot g'(z)$ = dérivée en z.

Preuve :

$$g(z+\xi) = \underbrace{g(z)}_{Z} + \xi g'(z) + \xi \cdot \varepsilon(\xi)$$
$$+ \boxed{\xi(g'(z) + \varepsilon)} \leftarrow \text{petit accroissem}^t \text{ écrit } \eta \text{ dans } f(z).$$

$$f(Z+\eta) = f(Z) + \eta f'(Z) + \eta \varepsilon(\eta)$$

d'où :

$$f(g(z) + \xi g'(z) + \xi \varepsilon(\xi)) = f(g(z)) + \underbrace{(\xi g'(z) + \xi \varepsilon(\xi))}_{\eta} f'(g(z)) + \dots$$

$$= f(g(z)) + \xi g'(z) \cdot f'(g(z)) + \dots$$

Association complexe - Réel.

Interprétation de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longrightarrow f(z) \\ x+yi \longrightarrow P(x;y) + iQ(x;y) \end{cases}$

Par abus de notation on note :

$f(z) = P(x;y) + iQ(x;y)$

Dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \quad \frac{\partial P}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \quad \frac{\partial P}{\partial y} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$\longrightarrow$ Jacobienne : $J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} dP \\ dQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Dérivabilité

Rappel : $f(Z+\xi) = f(Z) + \xi f'(Z) + o(\ )$

$\xi = h + i0$ réel — h accroissem^t en x

$Z + \xi = \boxed{x+h} + iy$ — k accroissement en y

$\xi = 0 + ik \longrightarrow Z + \xi = x + iy + ik$
$= x + i(y+k)$

$$f(Z+ik) = f(Z) + ikf'(Z) + o(..)$$
$$= f(Z) + k(if'(z)) + o(.)$$
$$= f(Z) + k\frac{\partial f}{\partial y} + o(.)$$

$$\Leftrightarrow f'(z) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow f'(Z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}}$$

× Relation de Cauchy Reimann : $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0}$
(condit de dérivabilité)

× Moyen Mnémotechnique : $\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ alors cela signifie que la fonction est dérivable au sens complexe. $\Rightarrow$ holomorphe

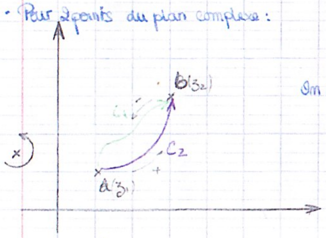
Si on a pas cette relat° a/b, alors ce n'est pas une fct° dérivable en complexe.

Primitives complexes

× Pour z^n : $\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de z^n

Cela nous permet de l'appliquer aux polynômes et aux séries.

• Pour 2 points du plan complexe :



$z = x(t) + iy(t)$
paramétrisat° de z.

On ne peut pas calculer $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$

Intégrat° sur chemin C_2^+

$$\int_{C_2^+} f(z)\, dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\, dz(t) = \int^{t} f \circ g(t) \cdot z'(t)\, dt$$

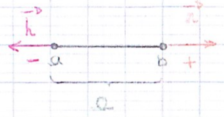
$\begin{cases} t = t_0 : z(t_0) = a \\ t = t_1 : z(t_1) = b \\ t_0 < t < t_1 : z(t) \text{ parcourt la courbe.} \end{cases}$

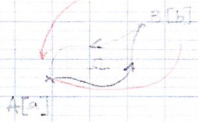
suite $\displaystyle\int_{\mathcal{C}^+} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} P(x(t);y(t)) + i\,Q(x(t);y(t))\,(x'+y')\,dt$ $\quad \left| \begin{array}{l} x'\,dt = dx \\ y'\,dt = dy \end{array} \right.$

$\displaystyle = \int_{t_0}^{t_1} (Pdx - Qdy) + i\int_{t_0}^{t_1} (Pdy + Qdx)$

<u>Formule de Reimann :</u>

$\displaystyle\int_{\partial\Omega} w = \int_{\Omega} dw$





$\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \overbrace{(Pdx - Qdy)}^{w}$ bord "$\partial\Omega$" $\displaystyle = \int_{\Omega} d(Pdx - Qdy)$

courbe

$dw = d(Pdx) - d(Qdy) = dPdx + \underbrace{d(dx)}_{=0} - (dQdy + \cancel{d(dy)})$

Memotechique =
$$\begin{cases} dP\wedge dx = \left(\dfrac{\partial P}{\partial x}dx + \dfrac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx = \dfrac{\partial P}{\partial x}\underbrace{dx\wedge dx}_{=0} + \dfrac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx \\[2ex] dQ\wedge dy = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}dx + \dfrac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy + \dfrac{\partial Q}{\partial y}\underbrace{dy\wedge dy}_{=0} \end{cases}$$

$dw = \partial P\wedge dx - \partial Q\wedge dy = \dfrac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx - \dfrac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy = \left(\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)\underbrace{dx\wedge dy}_{=-dy\wedge dx}$

<u>Definition =</u>

× ensemble connexe = union non disjointe

connexe

non connexe

× ensemble simplement connexe =

simplement connexe.

→ un cercle peut être contracté en un point

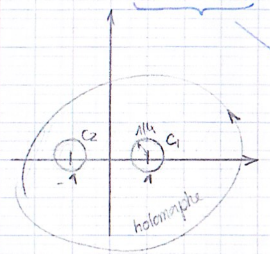
non <u>simplement</u> connexe.

mais qd même connexe.

<u>Exemple</u>

$f(z) = \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{1}{(z-1)}\cdot\dfrac{1}{(z+1)}$

→ DES $= \dfrac{\alpha}{z-1} + \dfrac{\beta}{z+1}$



$\displaystyle\int_{\substack{\text{grd} \\ \text{cercle}}} \frac{1}{z^2-1}dz = \int_{C_1}\frac{\alpha}{z-1}dz + \int_{C_2}\frac{\beta}{z+1}dz$

<u>Parametrage du cercle 1 :</u>

Centre 1
Rayon $r = \dfrac{1}{4}$ $\Big\}\ Z = z-1 = \dfrac{1}{4}e^{it} \Rightarrow z = 1 + \dfrac{1}{4}e^{it}$ et $dz = \dfrac{i}{4}e^{it}\,dt.$

$\displaystyle\int_{C_1}\frac{\alpha}{z-1}dz = \alpha\int_{C_1}\frac{dz}{z-1} = \int \alpha\int_0^{2\pi}\frac{i\,1/4\,e^{it}\,dt}{1/4\,e^{it}} = \alpha\int_0^{2\pi} i\,dt = 2i\pi\alpha$

$\displaystyle\int_{C_2}\frac{\beta}{z+1} = 2i\pi\beta.$

Signification très importante :

f holomorphe, connue « seulement » sur γ.

Alors f est connue partout à l'intérieur de γ.

Corollaire :

f fonction complexe de U ds $\mathbb{C}$

alors f holomorphe sur U $\Leftrightarrow$ f analytique sur U. (dev en série entière abs)

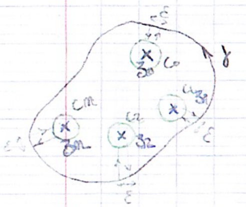
Analytique = Pour chaque z_0 de U, on peut trouver une série entière (dt les coefficients dépendent (z_0)), tq :

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

avec $a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$ où cette intégrale se déduit de $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(w)}{w-z}\,dz$ par dérivation sous l'intégrale

(Rappel : dévelop. Taylor : $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2!} + \dots$)

Théorème fondamental :



Soit γ une courbe fermée et f une fonction complexe définie sur tout le domaine contenu dans sauf peut être en n points $z_0, z_1, z_2 \dots z_{n-1}$.

On suppose que :

* f n'est pas dérivable en $z_0, z_1, z_2 \dots$

* les points $z_0, z_1 \dots z_n$ ne sont pas sur γ.

Alors

$$\int_{\gamma^+} f(z)\,dz = \sum_{i=0}^{n} \int_{C_n^+} f(z)\,dz$$ où C^+ est un cercle quelconque ne coupant pas γ, décrit ds le sens +.

intégrale sur de la courbe | intégrale des C_i^+

Corollaire :

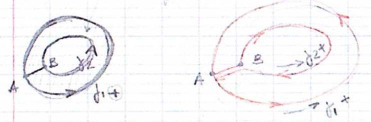
si on a une fonction holomorphe.

si on peut déformer CONTINUEMENT un chemin γ_1 en γ_2

alors :

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

holomorphe

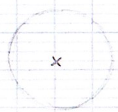


$$\int f_{holomorphe}\,dz = 0 \quad \text{puisque intégrale de } A \text{ à } A.$$

$\gamma_1^+ \cup AB \cup \gamma_2^- \cup BA = AA$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma_1}^{+} f dz + \int_{A}^{B} f dz + \int_{\gamma_2}^{-} f dz + \int_{B}^{A} f dz = 0 \quad \Leftrightarrow \int_{\gamma_1}^{+} f dz = \int_{\gamma_2}^{+} f dz$$

Quelques calculs.



$C(0,R)$

Paramétrage

$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases}$ ou $z(t) = R(\cos t + i\sin t) = Re^{it}$

Fonction holomorphe.

$$\int_C z^n\,dz = 0$$

z^n dérivable donc fonction holomorphe

$n \geq 0$ pour que ce soit " de $\mathbb{C}$.

Puisque cercle réductible en un point

Cercle : fermé = simplement connexe.

$\int$ point $= 0$.

Cas $n < 0$, $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2} \ldots$ pas défini en 0, cas de $\mathbb{C}^*$ pas réductible au point 0, pas simplement connexe.

• 1er cas : $n = -1 \rightarrow \frac{1}{z}$

$0 \leq t \leq 2\pi$ $\begin{cases} z = Re^{it} \\ dz = iRe^{it}\,dt \end{cases}$ $\quad \frac{dz}{z} = \frac{iRe^{it}\,dt}{Re^{it}} = i\,dt.$

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2i\pi \neq 0.$$

Intégrale curviligne — Intégrale classique

• 2ème cas : $n \neq -1$

$$\int_C \frac{1}{z^n}\,dz = \int_C \frac{1}{z^{n-1}} \cdot \int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^{n-1}} \cdot \frac{1}{e^{i(n-1)t}} \int_0^{2\pi} i\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{i}{R^{n-1}}\, e^{-i(n-1)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{R^{n-1}} \times \frac{1}{-(n-1)} \left[e^{-i(n-1)t} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{R^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-n} \left[\underbrace{e^{i(1-n)2\pi}}_{=1} - \underbrace{e^{0}}_{=1} \right] = 0$$

$$\int_{cercle} z^n = 0 \quad \text{sauf pour } n = -1 \Leftrightarrow \int \frac{1}{z}\,dz = 2i\pi$$

Théorème : (Cauchy)

Soit U simplement connexe (sans trou).

γ chemin fermé

f holomorphe dans U.

z strictement à l'intérieur de γ.

Alors $\boxed{f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw.}$ Formule de Cauchy.